The 33rd Symposium on Information Theory
and its Applications (SITA2010)
Matsushiro, Nagano, Japan, Nov. 30–Dec. 3, 2010

最大出力制約下での通信路容量と変調方式
Capacity and Modulations with Peak Power Constraint

池田 思朗* 林 和則† 田中 利幸†
Shiro Ikeda Kazunori Hayashi Toshiyuki Tanaka

Abstract— It is known that the communication channel capacity of the additive white Gaussian noise (AWGN) channel under peak power constraint is achieved by a distribution, whose support is a finite isolated points in a scalar case and is concentric circles in a vector case. In this paper, we compare the achievable rates of phase shift keying (PSK) and quadrature amplitude modulation (QAM) input constellations for a complex-valued AWGN channel with the capacity under the peak power constraint, and compare their constellations with the capacity-achieving distributions. The comparison reveals that achievable rates of PSK and QAM are close to capacities for certain ranges of signal to noise ratio (SNR) under different forms of peak power constraint.

Keywords— peak power constraint, capacity, AWGN channel, PSK, QAM.

1 はじめに

通信路への入力を X, 出力を Y とする．通信路容量は X と Y の相互情報量を入力分布の汎関数とみなし，その上界として定義される．通信路符号化定理を持ち出すまでもなく，通信路容量は情報理論において重要な意味を持つ．

通信路容量を議論する際には，任意の入力分布を許容するのではなく，入力分布がある確率分布の族 $\mathcal{P}$ に含まれるという条件のもとで相互情報量の上界を考えるのが普通である．工学的な実現性を考えれば $\mathcal{P}$ は有限アルファベットの集合上に定義された確率分布の族を取るのが良いが，一般には X の台として連続値を許容する．1 次元の AWGN (additive white Gaussian noise) 通信路に対して Shannon-Hartley の定理として知られている通信路容量 $(1/2)\log(1+\mathsf{SNR})$ (SNR: signal to noise ratio) は X の平均パワーに制限を置いた下での通信路容量と理解でき，通信路容量を達成する最適な入力分布は正規分布となる．

一方，同じ 1 次元 AWGN 通信路において入力の絶対値，すなわち X の台を制限する場合，通信路容量が有限個の点からなる離散分布によって達成されることが知られている [1]．すなわち，最適な入力分布は有限アルファベット上の分布となる．前に述べた平均パワー制約の場合と異なり，この場合の最適な入力分布はノイズの大きさに応じて点の数，位置，確率が変化する．また，これらは一般に解析的に求まらず，数値的に評価しなければならない．

通信路容量とそれを達成する分布は，この他にも様々な通信路や入力の制約の下で調べられているが，多くの場合，ある種の離散分布が最適な入力分布となる [2–4]．なかでも，無線通信などの応用を想定した場合に特に重要なのは AWGN 複素通信路である．AWGN 複素通信路は 2 次元の通信路とみなせ，最適な入力分布はどのような制約をおくかに依存するが，最大出力制約を含む多くの場合にある種の離散分布となる．具体的には，最適な入力分布の台は 2 次元的な広がりをもつことができず，有限個の点からなるか，もしくは 1 次元的な曲線上に局在する．

最大出力制約下で最適な分布が離散分布となることは工学的に重要である．現実の通信システムでは，消費電力を抑えるために，送信機（増幅器）の瞬間最大出力に厳しい制限がある [5]．この制限の中での最適な分布が，工学的に実現可能な有限個の点からなる離散分布となる場合があるからだ．

携帯電話などの通信システムでは，通信路状況に応じて変調方式を切り替える適応変調を用いている [6]．例えば PSK (phase shift keying: 位相偏位) 変調と QAM (quadrature amplitude modulation: 直交位相振幅) 変調との切り替えは伝送レートを上げるために用いる基本的な技術である．これらの変調方式によって達成可能なレートを調べ，最大出力制約下での通信路容量と比較することは，変調方式の選択や切り替えのために重要な示唆を与えるだろう．

本稿では，まず 1 次元の AWGN 通信路を例にとり，有限個の点からなる離散分布が最適な分布となることについて，どのような手順で証明されるのかを説明する．その後 AWGN 複素通信路の最大出力制約下での通信路容量とそれを達成する入力分布を計算し，nPSK, nQAM 変調によって達成可能なレートとの関係を調べることにより，適応変調への指針を与える．

* 〒 190-8562 東京都立川市緑町 10-3 統計数理研究所 The Institute of Statistical Mathematics, 10-3 Midoricho, Tachikawa-shi, Tokyo, 190-8562 Japan. E-mail: shiro@ism.ac.jp
† 〒 606-8501 京都市左京区吉田本町 36-1 京都大学 大学院情報学研究科 システム科学専攻 Department of Systems Science, Graduate School of Informatics, Kyoto University, 36-1 Yoshida-honmachi, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8501 Japan. E-mail: {kazunori,tt}@i.kyoto-u.ac.jp

2　通信路容量と最適な入力分布

2.1　AWGN 通信路と通信路容量

1 次元の AWGN 通信路を考える．

$$Y = X + \sigma N, \quad N \sim \mathcal{N}(0,1). \tag{1}$$

X は通信路への入力，Y は出力である．X と Y の間の相互情報量は以下のように定義される．

$$I(X;Y) = \mathbb{E}_\pi\left[\int_{\mathbb{R}} p(y|x)\log\frac{p(y|x)}{p_\pi(y)}\,dy\right] = \mathbb{E}_\pi\big[i(x;\pi)\big].$$

ここで $\pi(x)$ は入力分布であり，$\mathbb{E}_\pi[\cdot]$ は $\pi(x)$ によって期待値をとることを示す．$\pi(x)$ が x の連続分布ならば

$$\mathbb{E}_\pi[f(x)] = \int_{\mathbb{R}} \pi(x)f(x)dx$$

であり，離散分布ならば確率の定義された点を x_i として

$$\mathbb{E}_\pi[f(x)] = \sum_i \pi(x_i)f(x_i)$$

となる．$p_\pi(y)$ および $i(x;\pi)$ は以下の様に定義する．

$$p_\pi(y) = \mathbb{E}_\pi[p(y|x)], \quad i(x;\pi) = \int_{\mathbb{R}} p(y|x)\log\frac{p(y|x)}{p_\pi(y)}dy.$$

$i(x;\pi)$ は $p(y|x)$ から $p_\pi(y)$ への KL (Kullback-Leibler) 情報量であり，非負である．AWGN 通信路では $p(y|x)$ は平均 x, 分散 σ^2 の正規分布となる．通信路を固定したとき $I(X;Y)$ は $\pi(x)$ の汎関数である．この点を踏まえ，以下では相互情報量を $I(\pi)$ と書く．通信路容量 C は以下に定義される上界として与えられる．

$$C = \sup_{\pi\in\mathcal{P}} I(\pi). \tag{2}$$

ここで $\mathcal{P}$ は入力分布 π として許容する分布の集合である．例えば出力の平均パワーを S 以下に制限する場合，$\mathcal{P}$ は以下のようになる．

$$\mathcal{P}_{\mathrm{AP}} = \Big\{\pi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+ \;\Big|\; \mathbb{E}_\pi[x^2] \le S,\, \mathbb{E}_\pi[1] = 1\Big\}.$$

ここで $\mathbb{R}_+$ は非負の実数の集合である．また，$\mathbb{E}_\pi[1] = 1$ は $\pi(x)$ が確率分布となるための条件である．条件 $\pi \in \mathcal{P}_{\mathrm{AP}}$ のもとで通信路容量を求めると，$C = (1/2)\log(1 + S/\sigma^2)$ となる．このとき通信路容量を達成する入力分布 π は平均 0, 分散 S の正規分布である．

一方，入力分布 π の台を制限した場合，

$$\mathcal{P}_{\mathrm{PP}} = \Big\{\pi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+ \;\Big|\; \pi(x) = 0 \text{ for } |x| > a, \mathbb{E}_\pi[1] = 1\Big\}$$

という分布族を考えることになる．$\mathcal{P}_{\mathrm{PP}}$ の下での通信路容量については [1] で調べられている[1]．その結果，通信路容量を達成する入力分布 π が有限個の点からなる離散分布であることが示された．なお，最適な入力分布の点の個数，位置，確率は解析的には求まらないため数値的に計算しなければならない．

[1] 正確には Smith は最大出力と平均パワーを同時に考えたが，ここでは最大出力だけに注目する．証明の手順は同じである．

2.2　Smith の証明の手続き

ここでは Smith が 1971 に与えた証明の概略を紹介する．以下の証明は数学的に厳密ではない．厳密な手続きについては他の文献を参照されたい [1,4,7].

$\mathcal{P}_{\mathrm{PP}}$ の上で式 (2) で示される問題は確率測度を変数とした凸最適化問題である．詳細は省くが，確率測度の集合 $\mathcal{P}_{\mathrm{PP}}$ は Levy 距離のもとでコンパクト (weak* compact) であり，その上で定義された π の汎関数 $I(\pi)$ が厳密に上に凸 (concave) となる．この結果，$\mathcal{P}_{\mathrm{PP}}$ に最大値を与える入力分布が唯一存在し, 式 (2) は以下の問題となる．

$$C = \max_{\pi\in\mathcal{P}_{\mathrm{PP}}} I(\pi).$$

$I(\pi)$ の最大値を与える入力分布を π_0 とすると，以下の方向微分 (ガトー微分) は全ての $\pi \in \mathcal{P}_{\mathrm{PP}}$ に対して 0 以下になる．

$$I'_{\pi_0}(\pi) = \lim_{\eta\to 0}\frac{I\big((1-\eta)\pi_0 + \eta\,\pi\big) - I(\pi_0)}{\eta} \le 0, \quad \forall\pi \in \mathcal{P}_{\mathrm{PP}}.$$

$I'_{\pi_0}(\pi)$ は一般に以下のような形をしている．

$$I'_{\pi_0}(\pi) = \mathbb{E}_\pi\big[i(x;\pi_0)\big] - C.$$

C は通信路容量である．$C = \mathbb{E}_{\pi_0}\big[i(x;\pi_0)\big]$ であること，および全ての $\pi \in \mathcal{P}_{\mathrm{PP}}$ に対して

$$\mathbb{E}_\pi\big[i(x;\pi_0)\big] \le C$$

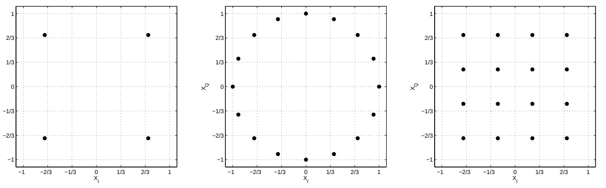
であることに注意すると，次の関係が示される．

$$i(x;\pi_0)\begin{cases} = C & x \in E_0 \\ \le C & x \notin E_0 \end{cases}. \tag{3}$$

ただし E_0 は π_0 が正となる $\mathbb{R}$ の点の集合である．

次に $i(x;\pi_0)$ の x の定義域を複素数 $z \in \mathbb{C}$ に拡張し，$i(z;\pi_0)$ が正則となる z の領域を求める．求める領域は実数軸上の線分 $\mathcal{X} = \{z \in \mathbb{R}, |z| \le a\}$ を含んでいる．

今，π_0 が正となる点，すなわち E_0 に属する点が無限個あると仮定する．式 (3) からその全ての点で $i(z;\pi_0) = C$ である．入力分布 π の台が含まれるべき実軸上の閉区間 $\mathcal{X}$ は $\mathbb{C}$ のコンパクトな部分領域であり，その中の無限個の点において正則な関数 $i(z;\pi_0)$ が定数 C と等しくなることが仮定されたことになる．E_0 は収束する点列を含むので，複素関数論の一致の定理を用いることがで



(a) QPSK の点配置. (b) 16PSK の点配置. (c) 16QAM の点配置.

図 1: 代表的な変調方式の点配置.

き，$i(z;\pi_0)$ が正則となる領域全ての点で $i(z;\pi_0)=C$ が成り立たなければならない.

Smith は $i(z;\pi_0)$ が正則となる領域全ての点で $i(z;\pi_0)$ が定数となり得ないことを示し，背理法によって E_0 が有限個の孤立点によって構成されていることを導いた.

この結果以降，様々な通信路と制約の下で通信路容量を達成する分布が調べられてきた [2–4, 8–12]．それら全ての証明は上に示した Smith の手続きを用いている．この証明は一致の定理を使う点に特徴がある．1 次元の通信路に対しては，一致の定理にもとづいて E_0 が有限個の孤立点の集合であるという結果を導くことになる．一方，N 次元のベクトル通信路に対しては，一致の定理を用いることによって E_0 が N 次元的な広がりを持たないことを示すことができる.

3 変調方式と制約

3.1 AWGN 通信路と最大出力制約

実際の通信システムで広く用いられている変調方式には，nPSK, nQAM などがある．これらの達成可能レートと通信路容量とを比較することは，適応変調を行なう際の指針としても重要である.

通信で用いる変調方式では，複素通信路を考えるのが一般的である．ノイズには正規ノイズを仮定する．以下では次式に示す AWGN 複素通信路を考える.

$$\begin{pmatrix} Y_I \\ Y_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_I \\ X_Q \end{pmatrix} + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} N_I \\ N_Q \end{pmatrix}, \quad N_I, N_Q \sim \mathcal{N}(0,1), \tag{4}$$

ここで添字 I, Q はそれぞれ同相成分，直交位相成分を表わすものとする.

平均パワー $\mathbb{E}_\pi[X_I^2+X_Q^2]$ を S 以下に制約した場合，式 (4) に示した AWGN 複素通信路の通信路容量は $\log(1+\mathsf{SNR})$, $\mathsf{SNR}=S/\sigma^2$ となり，通信路容量を達成する最適な入力分布は $X_I,\, X_Q \sim \mathcal{N}(0,\, S/2)$ となることが知られている.

この結果は重要であるが，符号化の観点から考えると，デジタル通信システムにおいて正規分布にしたがう連続分布を入力分布として考えるのは適切ではない．デジタル通信の変調方式では一般に, 複素平面上に複数の点を配置し，その間をマルコフ的に遷移する入力分布を考える．変調方式を定める際の重要な問題は点の配置だ．広く用いられている点配置は nPSK や nQAM である．代表的な変調方式の点配置を図 1 に示した．図 2 では式 (4) の AWGN 複素通信路において QPSK, 16PSK, 16QAM の達成可能な通信レートを平均パワー制約の下での通信路容量 $\log(1+\mathsf{SNR})$ と比較している．横軸には SNR をとってある．このグラフからは 16QAM の点配置が通信路容量にもっとも近いレートを与えるように見える．このことは，平均パワー制約下の AWGN 通信路において QPSK, 16PSK, 16QAM が利用可能な適応変調では，通信路容量の観点からは SNR によらず常に 16QAM を選択すべきであることを意味している.

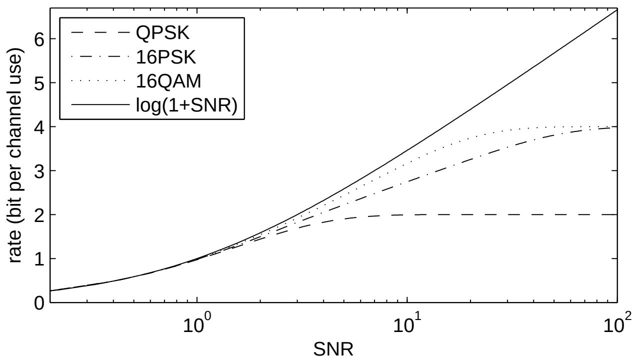


図 2: 平均パワー制約下での通信路容量と QPSK, 16PSK, 16QAM による達成可能レートの比較.

しかし，現実の通信システムの最大出力制約を考えると，図 2 の結果にもとづく上記の比較は 2 つの意味で適切ではない．ひとつの問題は通信路容量 $\log(1+\mathsf{SNR})$ である．この通信路容量は 2 次元の信号空間全体の上で定義された正規分布によってのみ達成できるものであり，最大出力制約下では到底達成できないレートである．したがって比較の対象として適切ではない．もうひとつは 16QAM と nPSK の比較である．同じ平均パワーの下では 16QAM の点配置の最大出力は PSK のそれの 9/5 倍になっている．これは最大出力制約下では公平な比較ではない.

最大出力制約には，2 つの自然な形が考えられる．$X_I^2, X_Q^2 \le E_{\max}/2$ のようにそれぞれの成分を制約する**ボックス制約**と，全体の出力を $X_I^2+X_Q^2 \le E_{\max}$ のように制約する**円制約**である．以下では, 最大出力制約下での信号とノイズの強度比を $\mathsf{pSNR}=E_{\max}/\sigma^2$ と書き，これをピーク SNR と呼ぶことにし, それぞれの制約の下での通信路容量について調べる．なお，AWGN 通信路における通信路容量は最大出力制約下では $\log(1+\mathsf{SNR})$ よりも小さくなる．なぜなら，入力分布の台が制限され

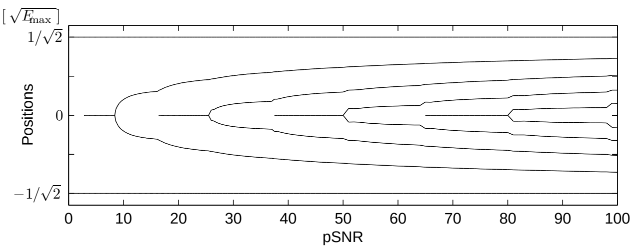
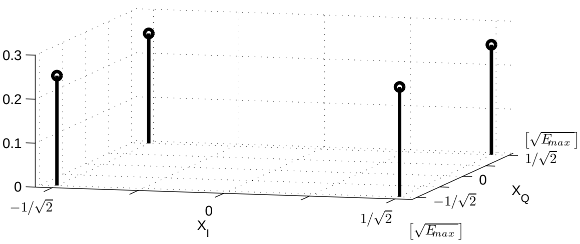
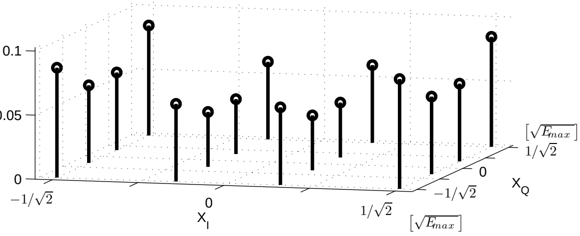


図 3: 1 次元 AWGN 通信路における最大出力制約下の最適な入力分布の点の位置.



(a) pSNR = 1 のとき.



(b) pSNR = 16 のとき.

図 4: AWGN 複素通信路におけるボックス制約下の最適な入力分布.

ており正規分布とはなり得ないからである.

3.2 ボックス制約

ボックス制約下では, I, Q 成分はそれぞれ独立な最大出力制約と独立な正規ノイズを受ける．したがって通信路容量を求めるには X_I と X_Q に関して独立に最大出力制約下での 1 次元の AWGN 通信路を考えれば良い.

Smith [1] が示したように，最大出力制約下での 1 次元の AWGN 通信路の通信路容量は有限個の孤立点からなる分布によって達成される．Gauss-Hermite 積分を用い，Smith の手法 [1] にしたがって最適な入力分布を数値的に計算した結果を図3に示す．図では横軸に pSNR をとり，対応する最適な分布の点の位置を表示してある．最適な分布は pSNR が大きくなるにつれて点の数が増えるが，常に 0 を中心に対称な分布になっている．また全ての pSNR において 2 点は $\pm\sqrt{E_{\max}/2}$ に位置している．ピーク SNR が小さいときには最適な入力分布は 2 点のみの分布となる．この結果を用いるとボックス制約下の AWGN 複素通信路において通信路容量を達成する入力分布が簡単に求まる．最適な入力分布の点の数は m を 2 以上の整数として常に m^2 となる．また，$m > 2$ に対しては各点の確率は一般に等しくない.

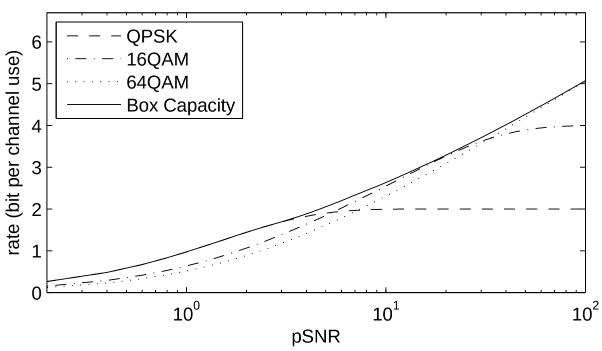


図 5: QPSK, 16QAM, 64QAM の達成可能レートとボックス制約下の通信路容量.

図 4a と 4b は異なる pSNR に対する最適な入力分布を示している．興味深いことに，小さな pSNR に対する最適な入力分布は QPSK であり (図 4a)，pSNR が 16 程度のときの最適な入力分布は 16QAM ととても良く似ている (図 4b).

図 5 に nQAM の達成可能レートとボックス制約下の通信路容量を比較した．注目すべき点は，各 pSNR において最大の達成可能レートを実現する変調方式が pSNR の増加とともに QPSK, 16QAM, 64QAM と推移し, かつそれぞれの変調方式が最適であるような pSNR 領域での達成可能レートがいずれも通信路容量に非常に近いことである．これは，ボックス制約下の AWGN 複素通信路では，pSNR に応じて nQAM の変調多値数 n を適切に選択することで通信路容量に近いレートを達成可能であることを意味し，現在広く用いられている適応変調のアルゴリズムを情報理論的に正当化するものである．例えば，QPSK, 16QAM, 64QAM が利用可能なとき，平均パワー制約に基づく設計では常に 64QAM を選択することになるが，一方，図 5 の結果を用いると, ボックス制約下では pSNR が 5.4 以下では QPSK を，33 以下では 16QAM を，それ以上では 64QAM を選択することになる. このとき, レートを 1, 2, 3 と設定したときの通信路容量からの劣化は, 平均パワー制約に基づく設計では pSNR でそれぞれおよそ 3.2, 2.0, 0.10 dB であるのに対し, 図 5 の結果に基づく適応変調ではそれぞれ 0.0, 1.0, 0.012 dB 程度にまで抑えられる.

3.3 円制約

円制約の下，AWGN ベクトル通信路の通信路容量とそれを達成する入力分布については既に Shamai(Shitz) らが結果を示している [2]．AWGN 複素通信路の場合もこの結果を用いることができる．以下で説明する.

最適な入力分布を説明するには極座標を用いるのが都

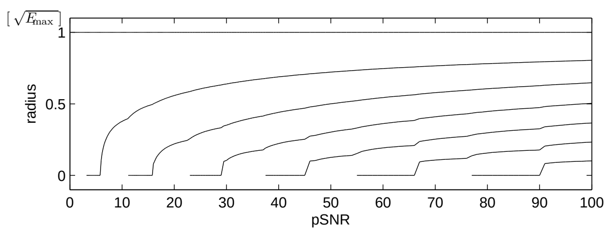
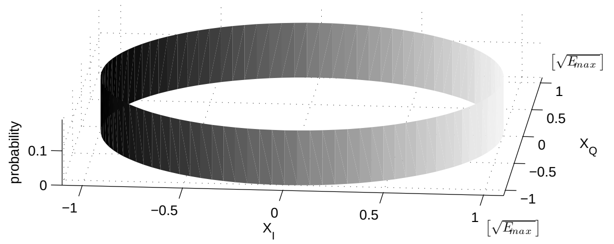
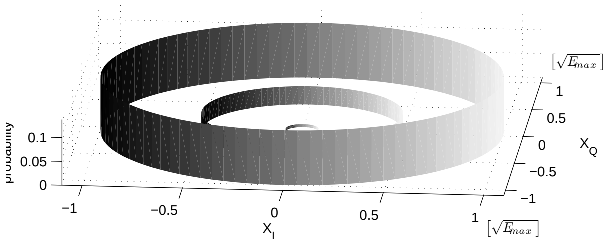


図 6: AWGN 複素通信路における円制約下の最適な入力分布の半径方向の点の位置.

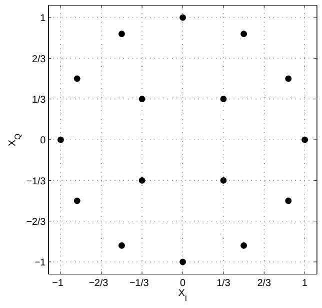


(a) pSNR $= 1$ のとき.

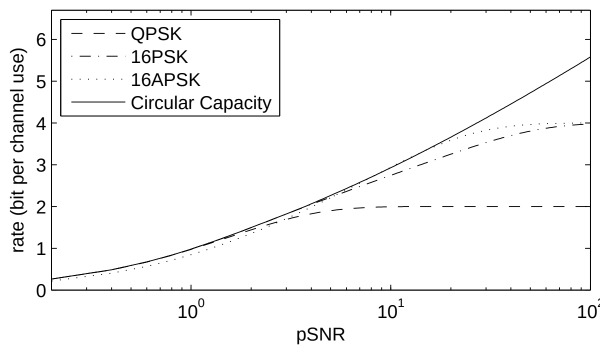


(b) pSNR $= 16$ のとき.

図 7: AWGN 複素通信路における円制約下の最適な入力分布.



(a) 16APSK の点配置.



(b) QPSK, 16PSK, 16APSK の達成可能レートと円制約下の通信路容量.

図 8: APSK の点配置と達成可能レート.

合が良い．点 (X_I, X_Q) を半径 r と位相 ϕ であらわす．円制約下で通信路容量を達成する最適な入力分布は r と ϕ とが独立な分布であること，そして ϕ に関しては一様分布となることが示せる．r に関する分布は 1 次元の問題となるため，2.2 節と同様の手続きによって有限個の孤立点からなる離散分布となることが示せる．したがって最適な入力分布は単一の円，または複数の同心円となる．このように円制約下での AWGN 複素通信路に対して通信路容量を達成する入力分布は孤立点から成る分布ではないが，2.2 節の最後に述べたように 2 次元的な広がりを持たない．同心円の個数，それぞれの半径，確率は pSNR によって変化する．前の結果と同様，これらは解析的には得られないため数値的手法に計算する．ここでは Gauss-Laguerre 積分を用い，Shamai(Shitz) らと同様の手法によって計算した [2].

図 6, 7 に円制約 $X_I^2 + X_Q^2 \le E_{\max}$ の下での通信路容量を達成する分布を示した．図 6 は最適な入力分布の半径方向の点の位置を pSNR に対して示したものである．ピーク SNR が小さいときには点の数は 1 であり，pSNR が大きくなるにつれて点の数が増える．どの pSNR に対しても常にひとつの点は台の端 $r = \sqrt{E_{\max}}$ に存在する．

図 7 は 2 次元の分布として最適な入力分布を表示したものである．小さい pSNR に対しては最適な分布が円となり (図 7a)，pSNR が大きくなると半径の異なる複数の同心円となること (図 7b) がわかる．

この結果から，円制約下では，pSNR が小さい場合には位相変調 nPSK を，pSNR が大きい場合 APSK (amplitude and phase shift keying) 変調を用いることが有効であることが予想される．そこで，QPSK, 16PSK, 及び 16APSK (点配置は図 8a の通り) の達成可能レートを円制約下の通信路容量と比較した結果を図 8b に示す．図より, pSNR が小さい領域では, QPSK 及び 16PSK による達成可能レートが通信路容量に大変近いことがわかる．特に, 16PSK はあまり頻繁に用いられる変調方式ではないが，QPSK に比べて pSNR の高い領域まで通信路容量に近い達成可能レートが得られていることは興味深い．一方，16APSK の達成可能レートは pSNR の小さい範囲では位相変調よりも悪いが, pSNR がおよそ 5 以上では 16PSK の達成可能レートよりも高く, pSNR がおよそ 16 までの範囲では円制約下の通信路容量に非常に近いことがわかる．ここで，pSNR が 5 及び 16 という値は, 図 6 においてそれぞれ,2 つ目の円と 3 つ目の円が発生する pSNR にほぼ対応している．以上のことから，円制約下の AWGN 複素通信路では PSK 及び APSK を

用いた適応変調によって通信路容量に近いレートが達成でき, 図 6 の結果は APSK の振幅レベルの数の切り替えへの有効な指標となると言える.

4 まとめ

本稿は，最大出力制約下では通信路容量を達成する分布が離散分布となるという古くからある結果を改めて示し，その工学的な有用性について考察したものである．本来通信路容量は入力に許されている自由度の中で最適な入力分布を探すものである．したがって，入力分布に課せられた制約と通信路の性質によって決まるものである．そして多くの場合，通信路容量を達成する最適な入力分布は離散分布となることが知られている．

離散分布は工学的に生成できる分布である．したがって，多くの場合通信路容量と同じ達成可能レートを持つ最適な変調方式は工学的に実現可能なことになる[2]．これは通信工学にとっては重要な結果である．本稿ではAWGN 複素通信路を例に取り，最大出力制約下での通信路容量とそれを達成する入力分布を調べ，実際に用いられている nPSK や nQAM といった変調方式の達成可能レートと比較した．

その結果，ボックス制約下の AWGN 複素通信路では nQAM の変調多値数を pSNR に応じて適切に選択することで通信路容量にかなり近いレートを達成できること，円制約下においては，pSNR が小さい範囲では nPSK の，ある程度以上では 16APSK の達成可能レートが通信路容量とかなり近いことが確認できた．

複素平面上で点をどのように配置するかはデジタル通信における重要な問題である．本稿で示した結果は PSK, APSK, QAM といった広く用いられている点配置のみを pSNR に応じて切り替えるだけで, 通信路容量に非常に近いレートを達成できることを示したものである．これは Shannon-Hartley の定理の結果として広く知られている $\log(1+\mathrm{SNR})$ との比較からは必ずしも示されない結果である．

参考文献

[1] J. G. Smith, “The information capacity of amplitude- and variance-constrained scalar Gaussian channels,” *Information and Control*, vol. 18, pp. 203–219, 1971.

[2] S. Shamai (Shitz) and I. Bar-David, “The capacity of average and peak-power-limited quadrature Gaussian channels,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 41, no. 4, pp. 1060–1071, 1995.

[3] M. C. Gursoy, V. Poor, and S. Verdú, “The noncoherent Rician fading channel–part I: Structure of the capacity-achieving input,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 4, no. 5, pp. 2193–2206, 2005.

[4] S. Ikeda and J. H. Manton, “Capacity of a single spiking neuron channel,” *Neural Computation*, vol. 21, no. 6, pp. 1714–1748, 2009.

[5] F. H. Raab, P. Asbeck, S. Cripps, P. B. Kenington, Z. B. Popović, N. Pothecary, J. F. Sevic, and N. O. Sokal, “Power Amplifiers and Transmitters for RF and Microwave,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 50, no. 3, pp. 814–826, 2002.

[6] S. T. Chung and A. J. Goldsmith, “Degree of freedom in adaptive modulation: a unified view,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, no. 9, pp. 1561–1571, 2001.

[7] M. C. Gursoy, H. V. Poor, and S. Verdú, “The capacity of the noncoherent Rician fading channel,” Princeton University Technical Report, 2002.

[8] I. C. Abou-Faycal, M. D. Trott, and S. Shamai(Shitz), “The capacity of discrete-time memoryless Rayleigh-fading channels,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 47, no. 4, pp. 1290–1301, 2001.

[9] T. H. Chan, S. Hranilovic, and F. R. Kschischang, “Capacity-achieving probability measure for conditionally Gaussian channels with bounded inputs,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 51, no. 6, pp. 2073–2088, 2006.

[10] R. Palanki, “On the capacity achieving distributions of some fading channels,” in *Proc of 40th Annu. Allerton Conf. Communi., Control, and Computing*, 2002, pp. 337–346.

[11] S. Shamai(Shitz), “Capacity of a pulse amplitude modulated direct detection photon channel,” *IEE Proceedings*, vol. 137, no. 6, pp. 424–430, 1990.

[12] A. Tchamkerten, “On the discreteness of capacity-achieving distributions,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 50, no. 11, pp. 2773–2778, 2004.

[2] 変調方式として最適なものが実現できても，通信路容量が達成できるわけでない．