ターボ符号と Gallager 符号の情報幾何

池田 思朗 [1,3] **田中 利幸** [2] **甘利 俊一** [3]
shiro@brain.kyutech.ac.jp tanaka@eei.metro-u.ac.jp amari@brain.riken.go.jp

1. 九州工業大学大学院 生命体工学研究科 & さきがけ研究 21 科技団
〒 808-0196 福岡県 北九州市 若松区 ひびきの 1–1
Tel & Fax: 093-695-3492
2. 東京都立大学大学院 工学研究科
〒 192-0397 東京都 八王子市 南大沢 1–1
3. 理化学研究所 脳科学総合研究センター
〒 351-0198 埼玉県 和光市 広沢 2–1

あらまし ターボ符号と Gallager 符号は，高い誤り訂正能力を持ち，かつ効率の良い復号法を持つ誤り訂正符号として知られている．その復号法の特性については，様々な数値実験を通じて細かく調べられ，有効性が示されているが，理論的には未知な部分が多い．我々は，情報幾何を用いてこれらの復号法を表現し，その数理的構造についての新たな解釈を与える．また，情報幾何を用いた表現に基づき，数理的解析の枠組を与える．本稿では特に両復号法の解の安定性，アルゴリズムの停留点に関するコスト関数と復号解の性質，また真の MPM (maximization of the posterior marginals) 解からの両復号法の復号誤差を明らかにする．本稿の与える数理的枠組は両復号法の解析のみでなく，人工知能で用いられるベイジアンネットの BP (Belief Propagation) アルゴリズムや統計物理のベーテ近似法に対しても有効である．

キーワード 情報幾何，ターボ符号，Gallager 符号

Information Geometry of Turbo Code And Gallager Code

Shiro Ikeda[1,3] **Toshiyuki Tanaka**[2] **Shun-ichi Amari**[3]
shiro@brain.kyutech.ac.jp tanaka@eei.metro-u.ac.jp amari@brain.riken.go.jp

1. Kyushu Institute of Technology & PRESTO, JST
1–1 Hibikino, Wakamatsu, Kitakyushu, Fukuoka, 808-0196 Japan
Tel & Fax: +81-93-695-3492
2. Tokyo Metropolitan University
1-1 Minami Oosawa, Hachioji, Tokyo, 192-0397 Japan
3. Brain Science Institute, RIKEN
2–1 Hirosawa, Wako, Saitama, 351-0198 Japan

`Abstract` The turbo code and the Gallager code are known to be practical and powerful methods for error correction. The properties of these codes have been investigated intensively mainly through experiments. Although those results strongly support the high ability of the codes, there is no satisfactory theoretical results. In this article, we elucidate the idea of these codes through information geometrical viewpoint. We give the mathematical framework for analyzing these codes, and from our study, we obtained the stability condition, cost function, characteristics of the equilibrium, and approximation ability. Recently it is pointed out that belief propagation for Bayesian net and Bethé approximation in statistical physics have very good similarities with these codes. Therefore, we believe our results will give a new perspective for these family of iterative methods.

`Key words` information geometry, turbo code, Gallager code

1 はじめに

ターボ符号 [3] と Gallager 符号 [5] は，復号に繰り返しアルゴリズムを用いる誤り訂正符号である．これらの符号がシャノン限界に近い信頼性を与え，かつ現実的な手法であることは，様々な数値実験を通じて明らかになっている．一方，理論的な結果については，いくつかの結果が報告されているものの [4, 7] 十分ではなく，アルゴリズムの持つ基本的な性質に関しても未知な部分は多い．一方，両復号法はベイジアンネットにおける BP アルゴリズムや，統計物理のベーテ近似と一致することが知られている．これらの手法についても，その理論的な背景は未知な部分が多い．

本稿では，情報幾何 [1, 2] を用いて，これらの手法の解析のための数理的枠組を与え，その枠組のもとでこれらの復号法の特性を示す．本稿では特にアルゴリズムの収束性，解の安定性，真の解からのずれを示す．

2 MPM 復号と繰り返し復号法

2.1 MPM 復号

ターボ復号と Gallager 復号の問題は次の $q(\boldsymbol{x})$ に基づく MPM 復号として一般化できる．$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_N)^T$, $x_i \in \{\pm 1\}$ として

$$q(\boldsymbol{x}) = C \exp(c_0(\boldsymbol{x}) + c_1(\boldsymbol{x}) + \cdots + c_K(\boldsymbol{x})). \quad (1)$$

$c_0(\boldsymbol{x})$ は $\{x_i\}$ についての線型な項，$c_k(\boldsymbol{x})$ は $\{x_i\}$ の高次の相関，C は規格化定数である．それぞれの具体的な定義については次節以降で述べる．MPM 復号はこの分布によって $\boldsymbol{x}$ の平均をとることと等しい．

$$\boldsymbol{\eta} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x} q(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \cdots, \eta_N)^T. \quad (2)$$

本来は各 η_i の正負が MPM 復号の結果となるが，本稿では (2) 式の軟判定を MPM 復号と呼ぶことにする．η_i は $q(\boldsymbol{x})$ の周辺分布 $q(x_i)$ によって定まるので，MPM 復号は $q(\boldsymbol{x})$ の周辺化を行なうことと同値である．$\mathit{\Pi}$ を周辺化のオペレータとする $\mathit{\Pi} \circ q(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^N q(x_i)$．ターボ符号と Gallager 符号では，この周辺化が計算量的に実現できない場合を扱う．ただし，次の $p_r(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\zeta}_r)$ $r = 1, \cdots, K$ は全ての $\boldsymbol{\zeta}_r \in \mathcal{R}^N$ について周辺化が可能であるとする．

$$\begin{aligned} p_r(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\zeta}_r) &= \exp\left(c_0(\boldsymbol{x}) + c_r(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\zeta}_r \cdot \boldsymbol{x} - \varphi_r(\boldsymbol{\zeta}_r)\right), \\ \varphi_r(\boldsymbol{x}) &= \log \sum_{\boldsymbol{x}} \exp\left(c_0(\boldsymbol{x}) + c_r(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\zeta}_r \cdot \boldsymbol{x}\right) \quad (3) \\ & \boldsymbol{\zeta}_r \in \mathcal{R}^N, \quad r = 1, \cdots, K. \end{aligned}$$

それぞれの $p_r(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\zeta}_r)$ は (1) 式の $\{c_k(\boldsymbol{x})\}$ のうち一つだけを含んでおり，$\boldsymbol{\zeta}_r$ によって $\boldsymbol{x}$ の線型の項を調整できる．これらの復号法では $\{\boldsymbol{\zeta}_r\}$ を調節し，$\mathit{\Pi} \circ q(\boldsymbol{x})$ を近似する．

2.2 ターボ符号の定式化

情報ブロック $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_N)^T, x_i \in \{\pm 1\}$ を二元対称通信路 (BSC: binary symmetric channel) を介して送ることを考える．ターボ符号は畳み込み符号として実装されるが，これは符号長を大きくするためで本質ではない．本稿ではブロック符号として扱う [6, 7]．ターボ符号は一つの符号語に対して 2 つのエンコーダを用いて 2 つのパリティ検査語を作成する．それぞれを $\boldsymbol{y}_1 = (y_{11}, \cdots, y_{1L})^T$, $\boldsymbol{y}_2 = (y_{21}, \cdots, y_{2L})^T$, $y_{1j}, y_{2j} \in \{\pm 1\}$ とする．$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$ は $\boldsymbol{x}$ の関数である．$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)$ を通信路によって送信すると，これらは $(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{\boldsymbol{y}}_2)$, $\tilde{x}_i, \tilde{y}_{1j}, \tilde{y}_{2j} \in \{\pm 1\}$ として受信される．この受信語に基づき，$\boldsymbol{x}$ を推定する．

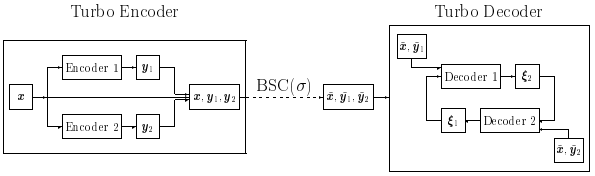

図 1: ターボ符号

ターボ符号の真の目的は $(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{\boldsymbol{y}}_2)$ の条件付きでの $\boldsymbol{x}$ の分布 $p(\boldsymbol{x}|\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{\boldsymbol{y}}_2)$ に基づく MPM 復号である．まずこの分布について考える．BSC の仮定から

$$\begin{aligned} p(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{\boldsymbol{y}}_2|\boldsymbol{x}) &= p(\tilde{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{x}) p(\tilde{\boldsymbol{y}}_1|\boldsymbol{x}) p(\tilde{\boldsymbol{y}}_2|\boldsymbol{x}) \\ p(\tilde{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{x}) &= \exp\left(\beta \tilde{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{x} - N\psi(\beta)\right), \ \psi(\beta) = \log(e^{-\beta} + e^{\beta}) \\ p(\tilde{\boldsymbol{y}}_r|\boldsymbol{x}) &= \exp\left(\beta \tilde{\boldsymbol{y}} \cdot \boldsymbol{y}_r - L\psi(\beta)\right), \ r = 1, 2, \end{aligned}$$

と書ける．β は正の実数であり，通信路のビット誤り率 σ は $\sigma = (1 - \tanh\beta)/2$ と表される．$\boldsymbol{x}$ の事前分布として一様分布 $p(\boldsymbol{x}) = 1/2^N$ を考え $c_0(\boldsymbol{x}) = \beta \tilde{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{x}$, $c_1(\boldsymbol{x}) = \beta \tilde{\boldsymbol{y}_1} \cdot \boldsymbol{y}_1$, $c_2(\boldsymbol{x}) = \beta \tilde{\boldsymbol{y}_2} \cdot \boldsymbol{y}_2$ と置くと $p(\boldsymbol{x}|\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{\boldsymbol{y}}_2)$ は次のようになる

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{x}|\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{\boldsymbol{y}}_2) &= \frac{p(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{\boldsymbol{y}}_2|\boldsymbol{x})}{\sum_{\boldsymbol{x}} p(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{\boldsymbol{y}}_2|\boldsymbol{x})} \\ &= C \exp\left(c_0(\boldsymbol{x}) + c_1(\boldsymbol{x}) + c_2(\boldsymbol{x})\right). \quad (4) \end{aligned}$$

これは (1) 式において $K = 2$ とした場合に等しい．ターボ符号は 2 つの復号器を用いるが，それぞれは (3) 式の $p_r(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\zeta}_r)$, $r = 1, 2$ に基づき MPM 復号を行なうものである．これは次式の $\omega(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\zeta})$ を $\boldsymbol{x}$ の事前分布として $p(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}_r|\boldsymbol{x})$ から $\boldsymbol{x}$ の事後確率を計算したものである．

$$\omega(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\zeta}) = \exp(\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{x} - \psi(\boldsymbol{\zeta})), \ \boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{R}^N. \quad (5)$$

ターボ復号は，$p_r(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\zeta}_r)$ の $\{\boldsymbol{\zeta}_r\}$ を交互に変化させ，(4) 式の周辺化を実現しようというものである．

2.3 Gallager 符号の定式化

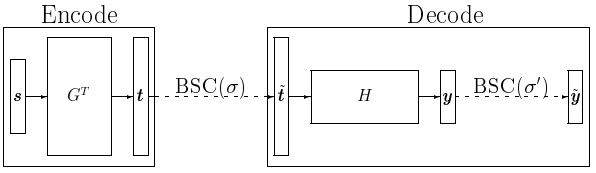

図 2: Gallager 符号

Gallager 符号は 2 つのスパースな行列 $C_1 \in \{0,1\}^{K\times M}$, $C_2 \in \{0,1\}^{K\times K}$ を用いて生成行列 G と検査行列 H を次のように定義する．ただし，I_M は M 次の単位行列，C_2 は $GF(2)$ 上で逆行列を持つとし，$N = M + K$ である．

$$G^T = \begin{bmatrix} I_M \\ C_2^{-1}C_1 \end{bmatrix}, \quad H = [C_1|C_2], \quad HG^T = O \mod 2.$$

情報ビット $\boldsymbol{s} \in \{0,1\}^M$ から生成行列 G^T によって符号語 $\boldsymbol{t}$ を $\boldsymbol{t} = G^T\boldsymbol{s} \mod 2$ として計算する．BSC によって受信語は $\tilde{\boldsymbol{t}}$ となり検査行列 H によってシンドロームを $\boldsymbol{y} = H\tilde{\boldsymbol{t}} \mod 2$ として計算する．通常はこのシンドロームを直接用いるのだが，ここではさらに σ' をビット誤り率とする BSC によって $\tilde{\boldsymbol{y}}$ が観測される場合を考える．$\sigma' = (1-\tanh\rho)/2$ と ρ を定義する．$\rho\to\infty$，すなわち $\sigma'\to 0$ の極限では $\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y}$ となる．$\boldsymbol{x}$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t} + \tilde{\boldsymbol{t}} \mod 2,$$

$HG^T = O$ であるので，$\boldsymbol{y} = H\boldsymbol{x} \mod 2$ が成り立つ．

これ以降 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ などは $\{0,1\}$ ではなく $\{\pm 1\}$ 表現とする．$\{\pm 1\}$ 表現では，シンドロームの各ビット y_i は $\{x_i\}$ の高次の相関として表現できる．

$$y_i = \textstyle\prod_{j\in\mathcal{L}_i} x_j.$$

$\mathcal{L}_i$ は H の i 行において $H_{ij} = 1$ である列の集合である．

$$\mathcal{L}_i \stackrel{\text{def}}{=} \{j|H_{ij} = 1\}.$$

BSC の仮定から $p(\tilde{\boldsymbol{y}}|\boldsymbol{x})$ は次のようにかける．

$$\begin{aligned} p(\tilde{\boldsymbol{y}}|\boldsymbol{x}) &= \exp\left(\rho\tilde{\boldsymbol{y}}_i\cdot\boldsymbol{y}_i - K\psi(\rho)\right) \\ &= \exp\left(c_1(\boldsymbol{x}) + \cdots + c_K(\boldsymbol{x}) - K\psi(\rho)\right) \\ c_i &\stackrel{\text{def}}{=} \rho\tilde{y}_i y_i(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$ の事前分布 $p(\boldsymbol{x})$ は各ビット独立であるとする．

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{x}) &= \exp\left(\beta\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{x} - N\psi(\beta)\right) = \exp\left(c_0(\boldsymbol{x}) - N\psi(\beta)\right) \\ c_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \beta\textstyle\sum_{i=1}^N x_i, \quad \mathbf{1} = (1,\cdots,1)^T. \end{aligned}$$

これらを用いれば，$p(\boldsymbol{x}|\tilde{\boldsymbol{y}}) = C\exp(c_0(\boldsymbol{x}) + c_1(\boldsymbol{x}) + \cdots + c_K(\boldsymbol{x}))$ であり (1) 式の $q(\boldsymbol{x})$ と等しい．以下の議論では ρ が有限の場合を扱うが，十分大きければ Gallager 復号の結果と現実的に差が無いと考えられる．

Gallager 復号は Horizontal-step と Vertical-step を用いるが，その Horizontal-step では (3) 式の $p_r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_r), r = 1,\cdots,K$ の MPM 復号を行なっている．これは (5) 式の $\omega(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta})$ を prior として $p(\tilde{y}_i|\boldsymbol{x})$ から $\boldsymbol{x}$ の事後確率を計算することと等しい．Gallager 復号も $p_r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_r)$ の $\{\boldsymbol{\zeta}_r\}$ を変化させ，(1) 式の周辺化を表現しようというものである．

3 ターボ復号と Gallager 復号の情報幾何

3.1 情報幾何と MPM 復号

本節では情報幾何による MPM 復号の表現について述べる．$\{\boldsymbol{x}\}$ の確率分布の族 S を考える．これは 2^N 個の要素に対する多項分布の多様体である．

$$S = \left\{ p(\boldsymbol{x}) \middle| p(\boldsymbol{x}) \geq 0, \boldsymbol{x}\in\{-1,+1\}^N, \sum_{\boldsymbol{x}} p(\boldsymbol{x}) = 1 \right\}.$$

S に含まれる e–平坦，m–平坦な部分多様体を定義する．

e–平坦: 多様体 $M\in S$ は，全ての $q(\boldsymbol{x}), p(\boldsymbol{x})\in M$ に対し，次の $r(\boldsymbol{x};t)$ が M に含まれるとき，e–平坦である．

$$\ln r(\boldsymbol{x};t) = (1-t)\ln q(\boldsymbol{x}) + t\,\ln p(\boldsymbol{x}) + c, \qquad t\in R.$$

c は規格化定数である．

m–平坦: 多様体 $M\in S$ は，全ての $q(\boldsymbol{x}), p(\boldsymbol{x})\in M$ に対し，次の $r(\boldsymbol{x};t)$ が M に含まれるとき，m–平坦である．

$$r(\boldsymbol{x};t) = (1-t)q(\boldsymbol{x}) + tp(\boldsymbol{x}), \qquad t\in[0,1].$$

次に m–射影について定義する．

定義 1. M を S 部分多様体とする．$q(\boldsymbol{x})\in S$ から M への m–射影は，M 上の点で，$q(\boldsymbol{x})$ から M への *Kullback-Leibler (K–L)* 情報量を最小にする分布である．

$$\begin{aligned} \Pi_M\circ q(\boldsymbol{x}) &= \operatorname*{argmin}_{p(\boldsymbol{x})\in M} D[q(\boldsymbol{x});p(\boldsymbol{x})], \\ D\left[q(\boldsymbol{x});p(\boldsymbol{x})\right] &= \textstyle\sum_{\boldsymbol{x}} q(\boldsymbol{x})\ln\dfrac{q(\boldsymbol{x})}{p(\boldsymbol{x})}. \end{aligned}$$

定理 1. M が S の e–平坦な部分多様体のとき，m–射影は *1* 点に定まる． □

ターボ復号と Gallager 復号の理解のため，S の中に各成分が独立である分布の多様体を考える．これを M_D とする．これは指数分布族であり，e–平坦な多様体である．

$$\begin{aligned} M_D &= \left\{ p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = \exp\left(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x} - \psi(\boldsymbol{\theta})\right) \middle| \boldsymbol{\theta}\in\mathcal{R}^N \right\}, \\ \psi(\boldsymbol{\theta}) &= \textstyle\sum_i \psi(\theta_i) = \sum_i \log(e^{-\theta_i} + e^{\theta_i}). \end{aligned}$$

パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ は多様体 M_D の座標系を与え，自然パラメータと呼ぶ．一方，期待値パラメータと呼ばれる別の座標系，$\boldsymbol{\eta}$ を定義する．$\boldsymbol{\theta}$ と $\boldsymbol{\eta}$ には 1 対 1 の関係が成り立つ．

$$\boldsymbol{\eta} = \textstyle\sum_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\eta} = \partial_{\boldsymbol{\theta}}\psi(\boldsymbol{\theta}). \tag{6}$$

定理 2. 確率分布 $q(\boldsymbol{x})$ の周辺化 $\Pi\circ q(\boldsymbol{x})$ は $q(\boldsymbol{x})$ から M_D への m–射影である．

証明. $q(\boldsymbol{x})$ から M_D への m–射影を考える．定理 1 より $D[q(\boldsymbol{x});p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})]$ を $\boldsymbol{\theta}$ で微分する．(6) の結果を用い，

$$\partial_{\boldsymbol{\theta}} D[q(\boldsymbol{x});p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})] = \boldsymbol{\eta} - \sum_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\eta} - \sum_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}(\Pi\circ q(\boldsymbol{x})),$$

となる．よって，m–射影を与える $\boldsymbol{\eta}$ 座標を $\boldsymbol{\eta}^*$ とすると， $\boldsymbol{\eta}^* = \sum_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}(\Pi \circ q(\boldsymbol{x}))$ である． 一方定義より $\boldsymbol{\eta}^* = \sum_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x} p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}^*)$ であるので，$\Pi \circ q(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}^*)$ が言える．したがって周辺化と m–射影は同値である． □

新たな分布 $p_0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})$ を考える．

$$\begin{aligned} p_0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) &= \exp\left(c_0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x} - \varphi_0(\boldsymbol{\theta})\right), \\ \varphi_0(\boldsymbol{\theta}) &= \log \textstyle\sum_{\boldsymbol{x}} \exp(c_0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{\theta}\in\mathcal{R}^N. \end{aligned} \tag{7}$$

$p_0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})$ と $p_r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_r)$ の多様体は両復号法を考える上で重要である．

$$\begin{aligned} M_0 &= \left\{ p_0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) \middle| \boldsymbol{\theta}\in\mathcal{R}^N \right\} \\ M_r &= \left\{ p_r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_r) \middle| \boldsymbol{\zeta}_r\in\mathcal{R}^N \right\}. \quad r = 1,\cdots,K. \end{aligned}$$

ターボ復号では $K=2$ である．各多様体は e–平坦であり $c_0(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ に対して線型であるので M_0 は M_D と等しい．

また，復号のため周辺化をする分布を $q(\boldsymbol{x})$ とする．ターボ符号の場合には $q(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x}|\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{y}}_1,\tilde{\boldsymbol{y}}_2)$ であり，Gallager 符号の場合は $q(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x}|\tilde{\boldsymbol{y}})$ である．最後に，任意の $p(\boldsymbol{x})$ から M_0 への m–射影によって求まる座標 $\boldsymbol{\theta}$ をオペレータ π_{M_0} を用いて $\pi_{M_0}\circ p(\boldsymbol{x})$ と書くことにする．

$$\pi_{M_0}\circ p(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{\theta}\in\mathcal{R}^N} D[p(\boldsymbol{x}); p_0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})].$$

3.2 ターボ復号と Gallager 復号の情報幾何的表現

本節では，両復号法の情報幾何的な表現を与える．π_{M_0} を用いると，ターボ復号は次のように書ける．

ターボ復号の情報幾何的表現

1. $t=0$ に対し $\boldsymbol{\zeta}_2^t = 0$ とおき， $t=1$ とする．
2. $p_2(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_2^t)$ から M_0 への射影 $\pi_{M_0}\circ p_2(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_2^t)$ を求め，$\boldsymbol{\zeta}_1^{t+1}$ を次のように計算する．
$$\boldsymbol{\zeta}_1^{t+1} = \pi_{M_0}\circ p_2(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_2^t) - \boldsymbol{\zeta}_2^t.$$
3. $p_1(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_1^{t+1})$ から M_0 への射影 $\pi_{M_0}\circ p_1(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_1^{t+1})$ を求め，$\boldsymbol{\zeta}_2^{t+1}$ を次のように計算する．
$$\boldsymbol{\zeta}_2^{t+1} = \pi_{M_0}\circ p_1(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_1^{t+1}) - \boldsymbol{\zeta}_1^{t+1}.$$
4. $\pi_{M_0}\circ p_1(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_1^{t+1})$ と $\pi_{M_0}\circ p_2(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_2^{t+1})$ が収束しなければ step 2 へ戻る．収束した場合には $\boldsymbol{\theta}^* = \boldsymbol{\zeta}_1^* + \boldsymbol{\zeta}_2^*$ として，$p_0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}^*)$ が $p_1(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_1^*)$， $p_2(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_2^*)$ から M_0 への射影となる．

一方 Gallager 復号は Horizontal step と Vertical step から成るが，情報幾何的に書くと以下のようになる．

Gallager 復号の情報幾何的表現

Initialization $t=0$ に対し $\boldsymbol{\zeta}_r^t = 0, r = 1,\cdots,K, \boldsymbol{\theta}^t = 0$ とおき $t=1$ とする．

Horizontal step 全ての r に対し $p_r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_r^t)$ から M_0 への射影 $\pi_{M_0}\circ p_r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_r^t)$ を求め，$\boldsymbol{\xi}_r^t$ を次のように計算する．

$$\boldsymbol{\xi}_r^t = \pi_{M_0}\circ p_r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_r^t) - \boldsymbol{\zeta}_r^t.$$

Vertical step $\boldsymbol{\theta}^{t+1}$ と $\boldsymbol{\zeta}_r^{t+1}$ を次のように計算する．

$$\boldsymbol{\theta}^{t+1} = \boldsymbol{\xi}_1^t + \cdots + \boldsymbol{\xi}_K^t, \quad \boldsymbol{\zeta}_r^{t+1} = \boldsymbol{\theta}^{t+1} - \boldsymbol{\xi}_r^t.$$

$\boldsymbol{\theta}$ が収束するまで繰り返す．

ターボ復号の場合には $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\zeta}_1 + \boldsymbol{\zeta}_2$ であるので，$\{\boldsymbol{\xi}_r\}$ は $\boldsymbol{\zeta}_1 = \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\zeta}_2 = \boldsymbol{\xi}_1$ と定義できる．その上で比べると，ターボ復号のステップ 2, 3 は Gallager 復号の Horizontal step によく対応していることが分る．ターボ復号では 2 つの m– 射影を交互に行なうが，Gallager 復号では全ての r に対し，並列に m–射影を行なっている．

4 情報幾何に基づく復号法の解析

4.1 停留点の持つ性質

復号の収束点を $\boldsymbol{\zeta}_1^*,\cdots,\boldsymbol{\zeta}_K^*, \boldsymbol{\theta}^*$ そして $\boldsymbol{\xi}_r^* = \boldsymbol{\theta}^* - \boldsymbol{\zeta}_r^*, r = 1,\cdots,K$ とする．収束条件より次の 2 つの条件が成り立つ．

1) $\pi_{M_0}\circ p_r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_r^*) = \boldsymbol{\theta}^*, \quad r = 1,\cdots,K$
2) $\boldsymbol{\theta}^* = \boldsymbol{\xi}_1^* + \cdots + \boldsymbol{\xi}_K^* = \dfrac{1}{K-1}(\boldsymbol{\zeta}_1^* + \cdots + \boldsymbol{\zeta}_K^*),$

したがって，これらの復号法では，真の MPM 復号の結果を $\boldsymbol{\theta}^* = \boldsymbol{\xi}_1^* + \cdots + \boldsymbol{\xi}_K^*$ として近似していることになる．

$$p_0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}^*) = \exp\left(c_0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\xi}_1^*\cdot\boldsymbol{x} + \cdots + \boldsymbol{\xi}_K^*\cdot\boldsymbol{x} - \varphi_0(\boldsymbol{\theta}^*)\right).$$

直観的には $p_r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_r)$ は上式の $\boldsymbol{\xi}_r$ を $c_r(\boldsymbol{x})$ で置き換えたものであり，それを M_0 へ m–射影することで $\boldsymbol{\xi}_r$ を推定する．これはターボ符号と Gallager 符号で共通する構造である．しかしながら，$\{c_r(\boldsymbol{x})\}$ の影響は一般には M_0 上で線型に分離できない．

ここで m–平坦な多様体 $M(\boldsymbol{\theta})$ を次のように定義する．

$$M(\boldsymbol{\theta}) = \left\{ p(\boldsymbol{x}) \middle| \sum_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x} p(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x} p_0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) \right\}.$$

これは S の中で，$\boldsymbol{x}$ の期待値が等しくなる分布の集合である．収束した点では，$p_0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}^*), p_r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_r^*), r = 1,\cdots,K$ は $M(\boldsymbol{\theta}^*)$ に含まれることが分る．

一方，収束点で，$p_0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}^*), p_r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_r^*), r = 1,\cdots,K$ を含む e–平坦な多様体 $E(\boldsymbol{\theta}^*)$ を定義する．

$$E(\boldsymbol{\theta}^*) = \left\{ p(\boldsymbol{x}) = C p_0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}^*)^{t_0} \prod_{r=1}^{K} p_r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_r^*)^{t_r} \middle| \sum_{r=0}^{K} t_r = 1 \right\}.$$

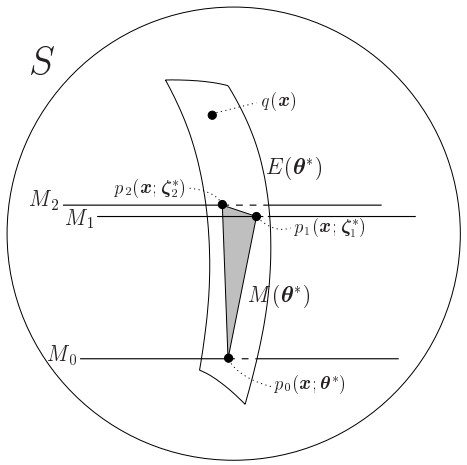

図 3: ターボ符号の停留点の性質 (定理 3)

定理 3. 停留点では，$p_0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}^*)$, $p_r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_r^*)$, $r=1,\cdots,K$ が $M(\boldsymbol{\theta}^*)$ に含まれ，$p_0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}^*)$, $p_r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_r^*)$, $r=1,\cdots,K$ とさらに $q(\boldsymbol{x})$ が $E(\boldsymbol{\theta}^*)$ に含まれる (図 3).

証明. $p_0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}^*)$, $p_r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_r^*)$ が $M(\boldsymbol{\theta}^*)$, $E(\boldsymbol{\theta}^*)$ に含まれることはその定義より確かめられる．$q(\boldsymbol{x})$ が $E(\boldsymbol{\theta}^*)$ に含まれることは $t_0=1-K$, $t_1=\cdots=t_K=1$ と置き，$\boldsymbol{\theta}^*=(\boldsymbol{\zeta}_1^*+\cdots+\boldsymbol{\zeta}_K^*)/(K-1)$ を用い

$$C\frac{p_1(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}^*)\cdot\cdots\cdot p_K(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}^*)}{p_0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}^*)^{K-1}}$$
$$=C\exp(c_0(\boldsymbol{x})+c_1(\boldsymbol{x})+\cdots+c_K(\boldsymbol{x}))=q(\boldsymbol{x}),$$

となることから確かめられる． □

真の MPM 復号では，$q(\boldsymbol{x})$ が $M(\boldsymbol{\theta}^*)$ に含まれるが，両復号法では $E(\boldsymbol{\theta}^*)$ のみに含まれる．後者で前者を代用する点が両手法の特徴である．e–平坦性と m–平坦性とは一般に一致しないため，多様体 $E(\boldsymbol{\theta}^*)$ と多様体 $M(\boldsymbol{\theta}^*)$ にはずれが生じる．このずれが復号誤差となる．

4.2 停留点の安定性

停留点の安定性の条件はターボ復号と Gallager 符号で多少異なる．まず，それぞれのモデルの期待値パラメータを定義する．(7) 式の $\varphi_0(\boldsymbol{\theta})$ と (3) 式の $\varphi_r(\boldsymbol{\zeta}_r)$ とを用いて，

$$\boldsymbol{\eta}_0(\boldsymbol{\theta})\stackrel{\text{def}}{=}\textstyle\sum_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}p_0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})=\partial_{\boldsymbol{\theta}}\varphi_0(\boldsymbol{\theta})$$
$$\boldsymbol{\eta}_r(\boldsymbol{\zeta}_r)\stackrel{\text{def}}{=}\textstyle\sum_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}p_r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_r)=\partial_{\boldsymbol{\zeta}_r}\varphi_r(\boldsymbol{\zeta}_r),\ r=1,\cdots,K,$$

と定義する．停留点では，$\boldsymbol{\eta}_0(\boldsymbol{\theta}^*)=\boldsymbol{\eta}_r(\boldsymbol{\zeta}_r^*)$ が全ての r について成り立っている．また $p_0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})$, $p_r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_r)$ の Fisher 情報量行列をそれぞれ $G_0(\boldsymbol{\theta})$, $G_r(\boldsymbol{\zeta}_r)$ とすると，これらは次のように定義される．

$$G_0(\boldsymbol{\theta})=\partial_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}'}\varphi_0(\boldsymbol{\theta}),G_r(\boldsymbol{\zeta}_r)=\partial_{\boldsymbol{\zeta}_r\boldsymbol{\zeta}_r'}\varphi_r(\boldsymbol{\zeta}_r),\ r=1,\cdots,K.$$

$G_0(\boldsymbol{\theta})$ は対角行列である．停留点のまわりで線形安定性解析を行う．安定条件は次の定理に示されるように，両復号法ともある行列 $\mathcal{T}$ の固有値の条件として求まる．

定理 4. $\mathcal{T}$ の固有値を λ_i とする．$|\lambda_i|<1$ が全ての i について成り立てば，停留点は安定である．但し $\mathcal{T}$ は，ターボ符号の場合は，

$$\mathcal{T}=\left(G_0(\boldsymbol{\theta}^*)^{-1}G_1(\boldsymbol{\zeta}_1^*)-I_N\right)\left(G_0(\boldsymbol{\theta}^*)^{-1}G_2(\boldsymbol{\zeta}_2^*)-I_N\right),$$

であり，*Gallager* 符号の場合は次の通りである

$$\mathcal{T}=\begin{pmatrix}O & G_0^{-1}G_2-I_N & \cdots & G_0^{-1}G_K-I_N\\ G_0^{-1}G_1-I_N & O & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ G_0^{-1}G_1-I_N & \cdots & \cdots & O\end{pmatrix}.$$

□

4.3 コスト関数と停留点の性質

$\boldsymbol{\theta}=\sum_{r=1}^K\boldsymbol{\zeta}_r/(K-1)$ と置き，次の関数を考える．

$$\mathcal{F}(\{\boldsymbol{\zeta}_r\})=(K-1)\varphi_0(\boldsymbol{\theta})-\sum_{r=1}^K\varphi_r(\boldsymbol{\zeta}_r).\qquad(8)$$

定理 5. 停留点 $\boldsymbol{\zeta}_r^*$, $r=1,\cdots,K$ は $\mathcal{F}$ の臨界点である．

証明. 直接微分すると，

$$\partial_{\boldsymbol{\zeta}_r}\mathcal{F}=\partial_{\boldsymbol{\theta}}\varphi_0(\boldsymbol{\theta})-\partial_{\boldsymbol{\zeta}_r}\varphi_r(\boldsymbol{\zeta}_r)=\boldsymbol{\eta}_0(\boldsymbol{\theta})-\boldsymbol{\eta}_r(\boldsymbol{\zeta}_r).$$

停留点では，$\boldsymbol{\eta}_0(\boldsymbol{\theta}^*)=\boldsymbol{\eta}_r(\boldsymbol{\zeta}_r^*)$ であることから，上の微分は 0 となる． □

停留点の性質を調べるために Hessian を求める．

$$\mathcal{H}=\begin{pmatrix}\partial_{\boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{\zeta}_1}\mathcal{F} & \cdots & \partial_{\boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{\zeta}_K}\mathcal{F}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_{\boldsymbol{\zeta}_K\boldsymbol{\zeta}_1}\mathcal{F} & \cdots & \partial_{\boldsymbol{\zeta}_K\boldsymbol{\zeta}_K}\mathcal{F}\end{pmatrix}\qquad(9)$$
$$=\frac{1}{K-1}\begin{pmatrix}G_0 & \cdots & G_0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ G_0 & \cdots & G_0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}G_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & G_K\end{pmatrix}.\qquad(10)$$

仮りに G_0 と G_r が停留点では近いという仮定が成りたつならば，停留点は一般に鞍点となる．

4.4 真の MPM 解からのずれ

定理 3 より，MPM 復号とターボ復号，Gallager 復号の差は $M(\boldsymbol{\theta}^*)$ と $E(\boldsymbol{\theta}^*)$ の差であることがわかった．この結果を用い，真の MPM 解とターボ復号解との差を摂動法によって計算する．新たに $\boldsymbol{v}=(v_1,\cdots,v_K)^T$ と $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})\stackrel{\text{def}}{=}(c_1(\boldsymbol{x}),\cdots,c_K(\boldsymbol{x}))^T$ を用い $p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v})$ を次のように定義する．

$$p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v})=\exp\left(c_0(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v})\right)$$
$$\varphi(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v})=\log\textstyle\sum_{\boldsymbol{x}}\exp\left(c_0(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})\right),$$

この分布は $p_0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})$ $(\boldsymbol{v}=0)$, $q(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{\theta}=0,\boldsymbol{v}=\mathbf{1})$, $p_r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_r)$ $(\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\zeta}_r,\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_r)$ をそれぞれ含んでいる．ただし $\boldsymbol{e}_r=(0,\ldots,0,\overset{\hat{}}{1},0,\ldots,0)^T$, $\sum_r \boldsymbol{e}_r=\mathbf{1}$ である．期待値パラメータ $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v})$ を定義する．

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v})=\partial_{\boldsymbol{\theta}}\varphi(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v})=\textstyle\sum_{\boldsymbol{x}} p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}.$$

ここで，すべての分布の期待値パラメータが等しくなるような部分多様体 $M(\boldsymbol{\theta}_0)$ を定義する．すなわち $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta}_0,\mathbf{o})\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta}_0)$ が成り立つような分布の集合である．Taylor 展開すると，

$$\begin{aligned}\eta_i(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v})&=\eta_i(\boldsymbol{\theta}_0)+\sum_j\partial_j\eta_i(\boldsymbol{\theta}_0)\Delta\theta_j+\sum_r\partial_r\eta_i(\boldsymbol{\theta}_0)v_r\\&+\frac{1}{2}\sum_{r,s}\partial_r\partial_s\eta_i(\boldsymbol{\theta}_0)v_rv_s+\sum_{j,r}\partial_r\partial_j\eta_i(\boldsymbol{\theta}_0)v_r\Delta\theta_j\\&+\frac{1}{2}\sum_{k,l}\partial_k\partial_l\eta_i(\boldsymbol{\theta}_0)\Delta\theta_k\Delta\theta_l+O(\|\boldsymbol{v}\|^3)+O(\|\Delta\boldsymbol{\theta}\|^3),\end{aligned}$$

となる．$\{i,j,k,l\}$ は $\boldsymbol{\theta}$ の, $\{r,s\}$ は $\boldsymbol{v}$ の添え字，$\Delta\boldsymbol{\theta}\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0$ である．$p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}_0,\mathbf{o})$ の Fisher 情報行列 G_0 の成分を $\{g_{ii}\}$ とし (G_0 は対角行列であるので，g_{ii} のみを考える)，G_0^{-1} の対角成分を g^{ii} とする．$g^{ii}=1/g_{ii}$ である．$\eta_i(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v})=\eta_i(\boldsymbol{\theta}_0)$ であることを用い，$\Delta\theta_i$ を v_r の 2 次までの項により表現し，3 次以上の項を無視すると，

$$\begin{aligned}&\Delta\theta_i\simeq -g^{ii}\sum_r A_r^i v_r-\frac{g^{ii}}{2}\times \qquad (11)\\&\sum_{r,s}\Big(\partial_r-\sum_k g^{kk}A_r^k\partial_k\Big)\Big(\partial_s-\sum_j g^{jj}A_s^j\partial_j\Big)\eta_i(\boldsymbol{\theta}_0)v_rv_s,\end{aligned}$$

とかける．ただし

$$A_r^i\overset{\text{def}}{=}\partial_r\eta_i(\boldsymbol{\theta}_0).$$

である．次の分布を考える．

$$\begin{aligned}&p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}_0,\mathbf{o})=\exp\left(c_0(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\theta}_0\cdot\boldsymbol{x}-\varphi(\boldsymbol{\theta}_0,\mathbf{o})\right)\\&p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_r,\delta\boldsymbol{e}_r)=\exp\left(c_0(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\zeta}_r\cdot\boldsymbol{x}+\delta c_r(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{\zeta}_r,\delta\boldsymbol{e}_r)\right)\\&p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta},\delta\mathbf{1})=\exp\Big(c_0(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x}+\delta\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{\theta},\delta\mathbf{1})\Big),\end{aligned}$$

これらのうち $p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}_0,\mathbf{o})$, $p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_r,\delta\boldsymbol{e}_r)$, $r=1,\cdots,K$ が $M(\boldsymbol{\theta}_0)$ に含まれるとし，$\boldsymbol{\theta}_0=\boldsymbol{\theta}^*$, $\delta=1$ とすると，各 $p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}_r,\delta\boldsymbol{e}_r)$ から求まる $\Delta\boldsymbol{\theta}_r$ は $-\boldsymbol{\xi}_r^*$ の近似となる．

$p(\boldsymbol{x};\bar{\boldsymbol{\theta}},\delta\mathbf{1})$ が $M(\boldsymbol{\theta}^*)$ に含まれると仮定し δ を 1 とすると $\Delta\bar{\boldsymbol{\theta}}$ は一般に 0 とはならない．これは $q(\boldsymbol{x})$ が $M(\boldsymbol{\theta}^*)$ に含まれないことを示している．$\bar{\boldsymbol{\theta}}=\Delta\bar{\boldsymbol{\theta}}+\boldsymbol{\theta}^*=\Delta\bar{\boldsymbol{\theta}}+\sum_r\boldsymbol{\xi}_r^*\simeq\Delta\bar{\boldsymbol{\theta}}-\sum_r\Delta\boldsymbol{\theta}_r$ を計算し，$\boldsymbol{\eta}(0,\mathbf{1})$ と $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta}_0)$ との差を M_0 上で評価すると次の定理が得られる．

定理 6. ターボ復号解の $\boldsymbol{x}$ の期待値を $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta}^*)$，*MPM* 復号解での期待値を $\boldsymbol{\eta}_{MPM}$ とおく．これらの間には次の近似が成り立つ．

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\eta}_{MPM}-\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta}^*)\simeq\\&\frac{1}{2}\sum_{r\neq s}\Big(\partial_r-\sum_k g^{kk}A_r^k\partial_k\Big)\Big(\partial_s-\sum_j g^{jj}A_s^j\partial_j\Big)\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta}^*).\end{aligned}$$

□

上式で与えられる復号誤差は，多様体 $E(\boldsymbol{\theta}^*)$ の埋め込み e–曲率と関係している．

5 まとめ

我々は情報幾何に基づき，ターボ符号と Gallager 符号の数理的構造を明らかにし，両復号法の解析のための枠組を与えた．この枠組の中で，解の安定性，解の持つ性質，コスト関数，復号誤差について示した．特に定理 6 に示した復号誤差は，実験的に示されていた両符号の有効性に対する初めての理論的な回答である．この誤差は $E(\boldsymbol{\theta}^*)$ の曲率に深く関連しているが，曲率は符号器の設計によって操作できる．したがって，この式に基づき符号器を設計すれば，より良い誤り訂正能力を持つ符号を設計できるだろう．

また，この問題は，より一般的に (1) 式の分布を周辺化する問題として捉えることができる．同様の構造は他にも，ループのあるベイジアンネットの BP アルゴリズム，統計物理のベーテ近似にも存在する．アルゴリズムの詳細については多少の差があるが，コスト関数の定義に基づく同様の解析は有効であり，定理 6 と同等の結果を導くことができる．このように，本論文で得た結果はより広い問題へ適用が可能である．

参考文献

[1] S. Amari. *Differential-Geometrical Methods in Statistics*, volume 28 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[2] S. Amari and H. Nagaoka. *Methods of Information Geometry*. AMS and Oxford Univ. Press, 2000.

[3] C. Berrou and A. Glavieux. Near optimum error correcting coding and decoding: Turbo-codes. *IEEE Trans. Comm.*, 44(10):1261–1271, 1996.

[4] Y. Kabashima and D. Saad. The TAP approach to intensive and extensive connectivity systems. In M. Opper and D. Saad, eds., *Adavanced Mean Field Theory – Theory and Practice*, pages 65–84. MIT Press, 2001.

[5] D. J. C. MacKay. Good error-correcting codes based on very sparse matrices. *IEEE Trans. IT*, 45(2):399–431, 1999.

[6] R. J. McEliece, D. J. C. MacKay, and J.-F. Cheng. Turbo decoding as an instance of Pearl's "belief propagation" algorithm. *IEEE J. SAC*, 16(2):140–152, 1998.

[7] T. Richardson. The geometry of turbo-decoding dynamics. *IEEE Trans. IT*, 46(1):9–23, 2000.